Un niño subido a un monopatín se desliza por una pendiente y continua después por un tramo horizontal que termina en un obstáculo. ¿De cuánto tiempo dispone el niño para saltar del monopatín si no quiere golpearse contra el obstáculo? *(Un ejemplo de tratamiento de situaciones problemáticas abiertas)*

Daniel Gil-Pérez
Universitat de València
Joaquín Mtnz-Torregrosa
Universitat d'Alacant
Lorenzo Ramírez
ICE Universitat de Lleida
André Dumas-Carré
Monique Goffard
Université Paris VII
Anna María Pessoa
Universidade de São Paulo

Summary

We present here an example of treatment of an open problematic situation in Physics, transforming peper and pencil problem-solving into an oriented research activity.

Nota introductoria

Presentábamos en un número anterior de esta revista (Gil et al., 1993) un ejemplo concreto de tratamiento de situación problemática abierta con una orientación de investigación. En esta ocasión volvemos sobre la misma idea de ir ejemplificando nuestra propuesta de resolución de problemas para mostrar sus potencialidades, describiendo más detalladamente con situaciones concretas qué es lo que ocurre en las clases.

Una descripción y fundamentación de esta orientación, los resultados obtenidos con la misma, etc, han sido recogidos en numerosos trabajos a los que nos remitimos (Gil y Mtnez-Torregrosa, 1983; Gil, Dumas-Carré, Caillot, Mtnez-Torregrosa y Ramírez, 1989; Dumas-Carré, Gil y Goffard, 1990; Gil, Carrascosa, Furió y Mtnez-Torregrosa, 1991; Gil, Mtnez-Torregrosa, Ramírez, Dumas-Carré, Goffard y Pessoa, 1992;....). Asimismo, los lectores interesados pueden acudir a sendos libros (Gil y Mtnez-Torregrosa, 1987; Ramírez, Gil y Mtnez-Torregrosa, 1994) en los que aparecen transcritos más problemas resueltos en la misma línea que el que presentamos a continuación.

Para evitar la confusión entre lo que es transcripción del trabajo de los alumnos y lo que son reflexiones, comentarios, etc, de los autores, hemos recurrido a la utilización de distintos tipos de letra:

* Negrita, para destacar lo que se propone a los alumnos (enunciados, textos de presentación, preguntas formuladas, etc). Aquí se incluyen, por supuesto, las peticiones explícitas del modelo como "Proceded al análisis cualitativo..." o "Considerad posibles perspectivas...".
* Cursiva, para transcribir lo que los alumnos hacen (o pueden hacer), aunque sin pretender una transcripción literal, sino reflejando, en general, el resultado final del trabajo realizado, tras las discusiones intergrupos animadas por el profesor y las síntesis y reformulaciones que este puede realizar o solicitar a lo largo de la resolución.
* Por último, utilizamos la letra normal para recoger las reflexiones y comentarios de los autores (dificultades detectadas o previsibles, intervenciones realizadas, etc.

Utilizando los tres tipos de letra pretendemos evitar confusiones sobre la autoría de los distintos desarrollos recogidos, sin impedir una lectura fluida, unitaria, de dichos desarrollos.

¿Cuál puede ser el interés de la situación planteada?

Los estudiantes, cuando disponen de algún tiempo para discutir esta cuestión, llegan a asociar el enunciado **"¿De cuanto tiempo dispone el niño para saltar del monopatín?"** a ciertas situaciones de interés como, p.e., *"la descarga de objetos (paquetes, troncos...) por una pendiente, para ser recogidos en un tramo horizontal. El tiempo disponible para recoger los objetos tendría interés para fijar el ritmo con el que son descargados"*. De forma general pueden referirse a movimientos que han de tener lugar en un tiempo limitado, como *"desde que un semáforo se pone amarillo"*, o *"desde que empieza a bajar la barrera en un paso a nivel"*. Incluso pueden referirse al *"tiempo que tardan algunas máquinas en golpear las piezas que los trabajadores van introduciendo"*. Este último ejemplo puede dar lugar a algunas discusiones de interés en torno al conflicto entre la seguridad de los operarios y las exigencias de una mayor productividad.

La importancia de esta reflexión inicial, como ya hemos señalado en otras ocasiones, no reside tanto en que los estudiantes encuentren muchas razones del posible interés de la situación planteada, cuanto en evitar los tratamientos puramente técnicos, que refuerzan la imagen de una ciencia descontextualizada que no se pregunta por el objeto ni por las implicaciones de su actividad. Ello permite, además, que los estudiantes se familiaricen mínimamente con la situación *antes* de comenzar un tratamiento sistemático, lo que contribuye a una mejor comprensión de la misma y a que su actividad sea más significativa.

Por otra parte, y al margen de las razones apuntadas por los estudiantes, la situación planteada tiene un interés didáctico suplementario, ya que permite, como veremos, abordar una cuestión de interés que raramente aparece en los problemas: la influencia "contradictoria" que pueden tener algunas variables. Ello constituye una buena ocasión para romper con razonamientos lineales que constituyen, como es bien conocido, un auténtico obstáculo en la construcción de los conocimientos científicos.

Análisis cualitativo de la situación y planteamiento del problema.

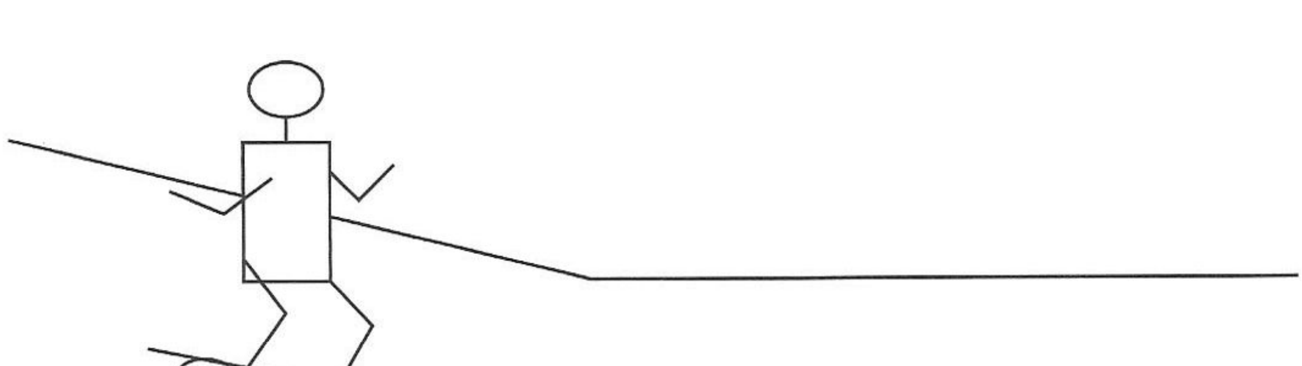
La situación planteada parece, de entrada, relativamente simple, y puede esperarse que los grupos de alumnos hagan reflexiones de este tipo para visualizar y acotar la situación:

"El monopatín comienza a deslizarse por la pendiente, aumentando progresivamente su velocidad (gracias, claro está a la atracción gravitatoria).

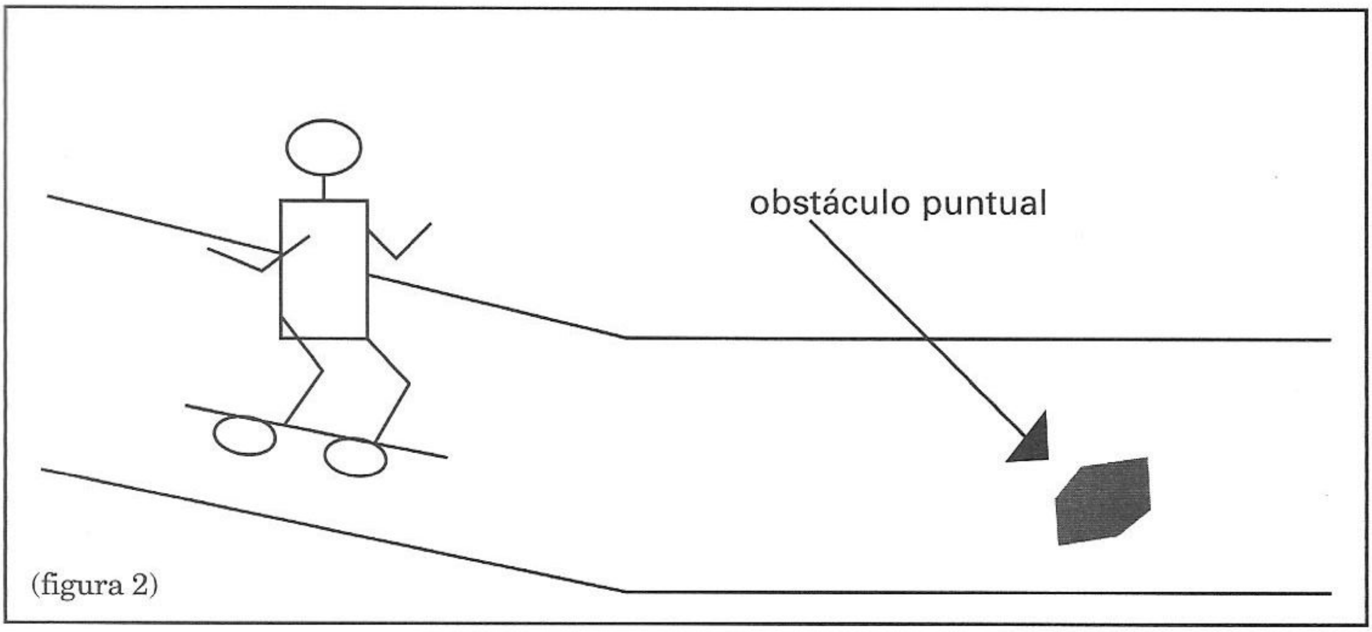
Después, en el tramo horizontal, continua avanzando sin que la velocidad disminuya mucho, debido a que la fricción es pequeña o, mejor, despreciable. Esta es la razón por la que el niño debe saltar, si no quiere chocar contra el obstáculo"

Es posible -pero no frecuente ya en este nivel- que los alumnos no se refieran explícitamente al papel de la fricción. En ese caso **conviene pedir precisiones (p.e: ¿por qué consideran que el monopatín sigue avanzando sin pararse antes de chocar?).** Las respuestas permiten constatar, en su caso, la persistencia de la asociación fuerza-movimiento (p.e. si algún alumno dice *"sigue avanzando mientras no se le acabe la fuerza"* o también *"como ya no hay pendiente, ira parándose, pero poco a poco"*, etc.). En ese caso , puede aprovecharse la situación para discutir, una vez más, estas cuestiones.

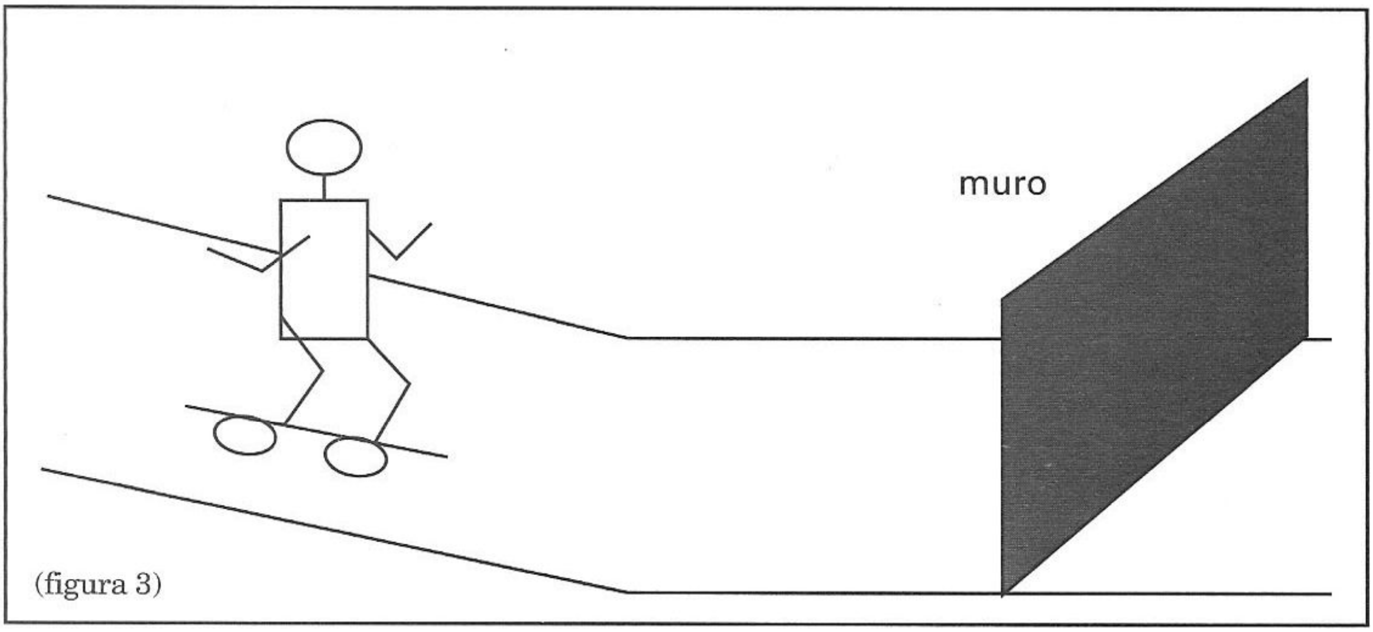
En cualquier caso resulta conveniente, en general, **solicitar nuevas precisiones para acotar adecuadamente el problema.** Es útil, en este sentido, pedir a los alumnos que dibujen el obstáculo y la trayectoria del patín en un esquema que visualice mejor la situación, como el siguiente (fig. 1):



(figura 1)



(figura 2)



(figura 3)

Ello da lugar a dos tipos de situaciones bien distintas. Algunos contemplan una situación como la indicada en la figura 2:

"Se puede suponer que el niño desciende en línea recta y continua en línea recta hacia el obstáculo (puntual). En ese caso basta con saltar de lado justo antes de que el patín toque al obstáculo".

Efectivamente ello es cierto, pero no significa necesariamente que se haya comprendido correctamente la situación. En efecto, algunos alumnos conciben una situación más compleja como la esquematizada en la figura 3, en la que el obstáculo ya no es puntual, sino que constituye un muro, pero siguen concibiendo que la solución consiste *"en saltar de lado"*. Reaparece así la asociación fuerza-movimiento suponiendo que basta saltar de lado para que el movimiento tenga lugar en esa dirección y cese el movimiento hacia delante.

Se hace necesario, pues, **solicitar precisiones acerca de como imaginan el movimiento del niño tras saltar del patín.** Ello conduce a una discusión clarificadora que permite a los alumnos rechazar la idea simplista de que baste "saltar de lado" para evitar el choque y comprender que:

"a menos que el obstáculo sea puntual, será necesario que el niño salte antes, para que la fricción con el suelo le permita parar antes de llegar al muro".

Se habrá procedido así, una vez más, a cuestionar un aspecto clave de la física "del sentido común".

Los alumnos pueden ahora plantear el problema a diversos niveles de profundidad. Así, una primera situación habitualmente considerada es la siguiente:

"Se puede suponer que el niño se deja deslizar por la pendiente, que el monopatín se mueve sin fricción apreciable y que el obstáculo es puntual. En este caso, el tiempo de que dispone el niño para evitar el choque es, como máximo, el que corresponde al desplazamiento del patín desde la posición inicial hasta llegar al obstáculo" -o, como algunos precisan, procediendo a un análisis temporal absolutamente necesario- *"la suma del tiempo de desplazamiento por la pendiente, con un movimiento acelerado, y el tiempo correspondiente al desplazamiento horizontal hasta el obstáculo, con movimiento uniforme".*

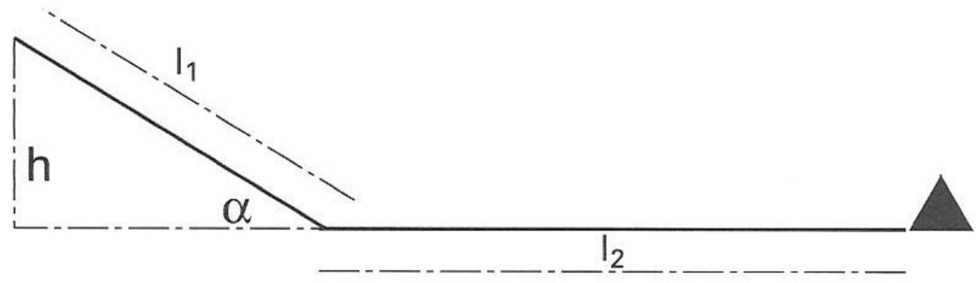
Merece la pena abordar primero esta situación relativamente simple, incluso si se pretende, a continuación, considerar la situación más compleja del muro. **Es preciso ahora insistir para que los alumnos expliciten con detalle las simplificaciones que consideran necesarias para acotar el problema.** No resulta fácil, en efecto, tomar decisiones explícitas del tipo *"vamos a considerar al patín (con el niño) como un objeto puntual"* o *"supondremos que al pasar del plano inclinado al horizontal no se produce choque y que el patín prosigue su movimiento con la velocidad adquirida".* Hemos de insistir, una vez más, en la importancia de estas reflexiones que constituyen un entrenamiento a la modelización y que permiten comprender que los resultados obtenidos son simples aproximaciones, con un dominio de aplicabilidad limitado. Es conveniente, pues, plantear a los alumnos estas cuestiones -p.e., durante las puestas en común- que ayudan, además, a una profundización y mejor compresión de la situación física planteada.

Construcción de hipótesis que focalicen el problema y orienten la resolución.

Un análisis cualitativo como el realizado conduce a los alumnos a:

"considerar que el tiempo total t de que dispone el niño dependerá de la inclinación a y longitud l_1 del plano inclinado, de la intensidad del campo gravitatorio g y de la longitud l_2 del plano horizontal. Es decir (fig. 4):

$t = f(\alpha, l_1, g, l_2)$



(figura 4)

En ocasiones se introduce h (altura sobre el plano horizontal del punto donde se inicia el movimiento) en vez de l_1 o en vez de la inclinación a. Una pequeña discusión permite ver a los alumnos que se trata de formulaciones equivalentes, puesto que las tres magnitudes están relacionadas entre si por $h = l_1$ sena. Por contra, a menudo se introduce un exceso de variables. Como ejemplo límite tendríamos:

" $t = f(\alpha, l_1, h, m, g, v, l_2)$

donde v es la velocidad del patín en el plano horizontal)"

La discusión permite que los alumnos comprendan que, p.e., v viene determinada por g, l_1 y α (o, si se prefiere, por g y h) que h, α y l_1 están relacionadas entre sí o que, como ya se visto tantas veces en situaciones similares, cualquier valor de la masa (siempre que no haya fricción) produce el mismo efecto.

Hemos constatado este tipo de dificultad incluso entre el profesorado en activo, lo que constituye un claro índice de la falta de práctica en este dominio, ya que los alumnos adquieren rápidamente la capacidad para distinguir cuándo una variable depende de otras ya introducidas.

En ocasiones el error procede de un estudio excesivamente analítico, que no tiene en cuenta las relaciones entre las fases en que se ha descompuesto el problema (caída por el plano inclinado y movimiento por el plano horizontal). En cualquier caso, se trata de **impulsar a una reflexión cuidadosa que evite la simple enumeración mecánica de factores.** Es necesario, pues, proceder a una consideración más detenida de la influencia de cada factor. Los alumnos ven sin dificultad la influencia del ángulo, de g y de l_2. Así, para el ángulo, suponen:

"Cuanto mayor sea el ángulo más rápidamente caerá y menor será, pues, el tiempo t de que dispone el alumno para saltar antes del choque. En el caso de que a tienda a cero, t tenderá a "infinito" (puesto que el patín está inicialmente en reposo)

También la influencia de g es claramente establecida:

"El cuerpo cae y se acelera gracias a la gravedad, por lo que, cuanto mayor sea g, mayor será la aceleración adquirida y menor será el tiempo disponible para saltar antes de llegar al obstáculo. Si g fuera cero el patín no caería, o lo que es lo mismo, el niño dispondría de un tiempo infinito"

Hay que añadir, sin embargo, que en ocasiones los alumnos olvidan incluir este factor g, debido a dos tipos de razones. En primer lugar, la omnipresencia de la gravitación hace que no se le preste atención. Es importante, pues, que durante el análisis cualitativo los alumnos no se limiten a afirmar *"el patín caerá por el plano inclinado"* o *"el patín se acelerará por el plano inclinado"*, sino que precisen en el proceso físico, **preguntándoles, si necesario, ¿por qué se acelerará?,** lo que saca a la luz la influencia de la atracción gravitatoria.

Por otra parte, algunos alumnos razonan así; *"g tiene un valor constante, por lo que t no puede depender de una constante"*. El mismo tipo de razonamiento aparece en numerosos problemas y se debe ayudar a los alumnos a distinguir entre constantes y parámetros (Carré 1988). **Una pregunta como ¿qué sucedería en lo alto del Himalaya (o en la Luna)?** ayudan a ver que se debe tener en cuenta la intensidad del campo gravitatorio.

La influencia de l_2 no plantea dificultades a los alumnos. Si acaso podríamos referirnos aquí a la tendencia a considerar, en principio, las relaciones como lineales *("cuanto mayor sea l_2 mayor será t, luego doble l_2 implica doble t")*, olvidando p.e., que el tiempo que se busca es la suma de dos términos -el de aceleración en el plano inclinado y el de desplazamiento horizontal uniforme- y que l_2 sólo influye en el segundo.

La influencia de l_1 es menos clara, o dicho de otra forma, resulta contradictoria y ello no siempre es visto por los alumnos. Nos encontramos así con reflexiones como esta:

"Cuanto más largo sea el plano inclinado más tardará el patín en bajar y de más tiempo, pues, dispondrá el niño".

Otros alumnos, sin embargo, ven que:

"A igualdad de otros factores (ángulo), cuanto mayor sea l_1, más se acelerará el patín, más aprisa se moverá, pues, y menor será el tiempo disponible"

Ambas afirmaciones son parcialmente correctas y obligan a un análisis más cuidadoso, puesto que un aumento de l_1 supone, a la vez, un crecimiento del tiempo de bajada (t_1) y una disminución del tiempo empleado en recorrer el plano horizontal (t_2), no pudiéndose concluir fácilmente qué ocurrirá con el tiempo total ($t = t_1 + t_2$).

Se puede imaginar, sin embargo, que si el trayecto horizontal l_2 es mucho mayor que la longitud de la pendiente l_1, $t_2 >> t_1$, con lo que un aumento en l1 se traducirá en una disminución del tiempo total. Del mismo modo, si $l_1 >> l_2$, $t_1 >> t_2$ y, consiguientemente, un aumento de l_1 se traducirá en un aumento del tiempo total. Ello constituye una hipótesis suplementaria -o, más precisamente, una profundización de la hipótesis- que puede exigir de los alumnos **"un complemento de reflexión" solicitada explícitamente por el profesor** ("considerad más cuidadosamente la influencia de l_1 en el tiempo total empleado por el patinador") para obligarles a profundizar en su análisis, a menudo superficial y erróneo (limitándose p.e, a considerar la influencia de l_1 sobre t_1, etc.).

Estrategias de resolución

La existencia de una clara discontinuidad en el movimiento hace pensar a los alumnos en obtener t como suma de t_1 y t_2, que representan respectivamente, recordemos, el tiempo empleado por el patinador en descender por la pendiente y en recorrer el tramo horizontal:

"Se trata de obtener $t = t_1 + t_2$, aplicando las ecuaciones de la cinemática a cada uno de los tramos.

La primera parte es un movimiento uniformemente acelerado (con una aceleración cuyo cálculo no plantea dificultades). La segunda es un movimiento uniforme con una velocidad V_f que es la adquirida durante la caída".

Otra estrategia ordinariamente propuesta consiste en calcular la velocidad adquirida en el plano inclinado mediante las relaciones trabajo/energía, pero recurriendo de todas formas a las relaciones cinemáticas del movimiento uniformemente acelerado y del movimiento uniforme para obtener los tiempos. Pocas veces hemos visto proponer la obtención de V_f y la aplicación del concepto de velocidad media a cada tramo ($V_f/2$ en el primero y V_f en el segundo) con lo que se evitan las ecuaciones del M.U.A. Pero, evidentemente, se trata de pequeñas modificaciones de la misma estrategia, aunque es siempre interesante que los alumnos puedan ver la coherencia de todos estos abordes.

Se puede también contemplar un camino algo más diferente, consistente en partir de otra operativización de las hipótesis (p.e., la que consiste en poner t en función de h, l_1, g y l_2) con objeto de constatar después que los resultados obtenidos son equivalentes (si se tiene en cuenta la relación entre h, l_1 y el ángulo).

Conviene advertir, una vez más, que los alumnos suelen tener serias dificultades para imaginar estos diferentes caminos: no se trata, por supuesto, de una tarea automática (para la que baste con "elegir los principios adecuados", etc.). Es preciso que los alumnos comprendan que son el análisis cualitativo y las hipótesis las que pueden guiar eficazmente esta búsqueda de posibles caminos de resolución. **Será necesario, particularmente, solicitar otros caminos de resolución** cuando los alumnos se contentan con uno sólo (en este problema es el tratamiento cinemático el que es propuesto habitualmente). De este modo, al profundizar, llegan a incluso a imaginar caminos o variantes que el profesor no había previsto inicialmente.

Resolución propiamente dicha.

Señalemos de entrada que esta fase de la resolución presenta sus propias dificultades a las que es preciso prestar atención. Quizás la principal dificultad que hemos detectado sea no tener explícitamente en cuenta las hipótesis para orientar los procesos de resolución: es la necesidad de expresar t en función de las variables retenidas (l_1, α, g y l_2) lo que da sentido a las transformaciones matemáticas a realizar como tentativas de solución; en caso contrario dichas transformaciones resultan artificiales, carentes de significado. Transcribiremos ahora el tipo de resolución que suelen realizar los equipos de alumnos:

"Estrategia cinemática
(o, más precisamente, dinámico-cinemática)

Tomamos como origen el punto e instante en que el patín comienza a descender, con lo que:

$l_1 = 1/2at_1{}^2$

En cuanto a la aceleración tendremos:. $a = gsen\alpha$
con lo que obtenemos para t_1:

$t_1 = \sqrt{2l_1/gsen\alpha}$

En la segunda parte del movimiento tendremos: $l_2 = Vf\,t_2$
donde $Vf = at_1 = gsen\alpha t_1 = \sqrt{2l_1 gsen\alpha}$
con lo que $t_2 = l_2/\sqrt{2l_1 gsen\alpha}$

Por último tendremos para el tiempo total t:

$t = \sqrt{2l_1/gsen\alpha} + l_2/\sqrt{2l_1 gsen\alpha}$

y agrupando los factores para facilitar el análisis:

$t = 1/\sqrt{gsen\alpha}\,(\sqrt{2l_1} + l_2/\sqrt{2l_1})$

Estrategia energético/cinemática

Aplicando el principio de conservación de la energía al sistema patinador/tierra durante la caída por el plano inclinado se puede obtener Vf (recordemos que se desprecia la fricción):

$\Delta Ec + \Delta Ep = 0$

Según esto:

$(1/2mVf - 0) + (0 - mgh) = 0$

de donde: $Vf = 2gh = 2gl_1 sen\alpha$
(de acuerdo con el resultado ya obtenido).

Ahora t_1 se puede obtener a partir, p.e, de la relación que proporciona la velocidad en función del tiempo en un movimiento uniformemente acelerado:
$V_f = at_1$; de donde $t_1 = V_f/a = 2l_1/gsen\alpha$

El cálculo de t_2 lo haremos igual que en el caso anterior y llegamos así al mismo resultado final para el tiempo total t"

Análisis de los resultados. Perspectivas.

El análisis de los resultados realizado por los alumnos puede transcribirse en estos términos:

"Hemos obtenido la expresión

$t = 1/\sqrt{gsen\alpha}\,(\sqrt{2l_1} + l_2/\sqrt{2l_1})$

por dos caminos diferentes (al menos en parte) lo que constituye ya una primera contrastación de su validez.

Por otra parte hemos obtenido t en función de l_1, g, α y l_2, tal como predecían las hipótesis. Más aún, reencontramos las variaciones previstas:

Así, por lo que se refiere a la influencia de la intensidad del campo gravita-

torio, puede verse claramente que al aumentar g, t disminuye. Si g fuera cero, el valor de t tendería a infinito, es decir, si no hubiera gravitación el patín no caería y el niño podría saltar en cualquier instante sin peligro de chocar.

También la influencia del ángulo se ajusta a las predicciones de la hipótesis: al aumentar el ángulo el tiempo disminuye (puesto que el patín adquirirá mayor velocidad). Y si el ángulo fuera cero (patín sobre superficie plana) el tiempo de que dispone el niño "tenderá a infinito".

Del mismo modo se comprueba fácilmente que si la longitud del plano horizontal aumenta el niño dispone de más tiempo.

Resulta esencial que los alumnos hagan una *lectura física* de los resultados apoyándose para ello en las hipótesis. Es preciso insistir en ello (y solicitarlo explícitamente) porque fácilmente se cae en lecturas puramente matemáticas del resultado, del tipo: *"si l_2 aumenta t aumenta"*, etc.

Por lo que se refiere a l_1 nos encontramos, tal como habíamos previsto con una influencia contradictoria en los dos términos y $\sqrt{2l_1}$ y $l_2/\sqrt{2l_1}$. De acuerdo con el primer término, t crece con l_1; de acuerdo con el segundo es al contrario.

Se puede constatar ahora que si $l_2 \gg l_1$ (por ejemplo 100 veces más grande) un aumento de la longitud del plano inclinado se traduce, como esperado, en una disminución del tiempo total. por contra, si $l_1 \gg l_2$ (por ejemplo 100 veces más grande) puede constatarse que un aumento de l_1 comporta un aumento del tiempo total.

Se puede también -si el nivel de los alumnos lo permite- plantear la cuestión siguiente: **"Precisar las condiciones en las que un aumento de l1 se traduce en un aumento del tiempo total".** Se trata, por supuesto de derivar la expresión $\sqrt{2l_1} + l_2/\sqrt{2l_1}$ respecto a l_1, etc. Se obtiene así como valor límite $l_1 = l_2/2$. Para valores inferiores de la longitud del plano inclinado, un aumento de la misma produce una disminución del tiempo total, mientras que para valores de $l_1 > l_2/2$, un aumento de l_1 se traduce en un aumento del mismo.

Esta parte del problema nos muestra el peligro de un análisis de la situación en dos etapas separadas que no tenga en cuesta la relación entre las mismas. De hecho este peligro aparece ya en la construcción de las hipótesis. En efecto, si se aborda el problema en dos partes separadas se puede considerar que el tiempo t_1 correspondiente al deslizamiento por el plano inclinado es función de g, de l_1 y del ángulo (aumentando dicho tiempo con l_1) mientras que para el plano horizontal, t_2 se considera función de l_2 y de la velocidad V del patinador. Se puede así llegar a pensar que el tiempo total es función de esas cinco variables (olvidando que v es la velocidad adquirida en el descenso y no puede ser considerada una variable independiente) o a afirmar que un aumento de l_1 supone siempre un aumento del tiempo total.

Puede ahora plantearse, como profundización, el estudio más complejo de la situación en la que el obstáculo es un muro (con lo que el niño habrá de saltar antes, frenar sometido a algún tipo de rozamiento, etc.). No nos detendremos aquí en transcribir dicha resolución y terminaremos con una revisión global de lo que el tratamiento de este problema ha planteado desde el punto de vista didáctico.

Notas de recapitulación.

En primer lugar, el **análisis cualitativo** de la situación ha puesto en evidencia (¡una vez más!) las ideas intuitivas de los alumnos acerca de la relación fuerza/velocidad y ha mostrado la posibilidad de tratamiento de las mismas que ofrece esta orientación de la resolución de problemas. También ha hecho ver la importancia (y las dificultades) de la toma de decisiones explícitas para acotar y modelizar la situación.

La **emisión de hipótesis,** por su parte, nos ha puesto en contacto con las dificultades para considerar los factores adecuados; se puede con facilidad retener un exceso de variables (sobre todo si se decide descomponer el problema en dos fases separadas, sin tener en cuenta las dependencias entre las magnitudes que intervienen en ambas fases) y se puede también olvidar alguna (es lo que ocurre a menudo con g si el análisis cualitativo no es suficientemente "físico"). Hemos constatado también la dificultad que plantea, en ocasiones, la comprensión del sentido de las variaciones (p.e, la influencia de la longitud del plano inclinado en el tiempo total que se busca) lo que obliga a una reflexión cualitativa más profunda, o la equivalencia entre diferentes formas de operativizar las hipótesis (p.e, reteniendo como variables l_1, a, g y l_2 o bien l_1, h, g y l_2, etc.).

Las **estrategias de resolución** han mostrado el aspecto *creativo* que puede tener también esta actividad al obligar a imaginar y concretar de forma precisa diferentes caminos, etc. Es necesario insistir en que no se trata simplemente de "elegir los principios", de proponer "un tratamiento cinemático" o "un tratamiento energético".

La **resolución propiamente dicha** ha evidenciado *la importancia de las hipótesis construidas* (factores retenidos, etc.) y de las estrategias elegidas como *guía de la resolución* que da sentido a las transformaciones matemáticas efectuadas, etc.

El **análisis de los resultados,** por último, ha mostrado la equivalencia de los diferentes tratamientos realizados, lo que permite insistir, por una parte, sobre la coherencia del corpus de conocimientos manejado y, por otra, sobre la validez de las diferentes operativizaciones de las hipótesis. Hemos visto también la posibilidad de plantear nuevos problemas que suponen una profundización en el estudio de la situación.

Referencias bibliográficas

DUMAS-CARRÉ A., GIL D. y GOFFARD M. (1990): Les élèves peuvent-ils resoudre des problèmes?, *Bulletin de l'Union des Physiciens,* 728, 1289-1299.

GIL D., CARRASCOSA J., FURIÓ C. y MTNEZ-TORREGROSA J., (1991): La enseñanza de las ciencias en la educación secundaria. (Horsori: Barcelona).

GIL D., DUMAS-CARRÉ A., CAILLOT M., MTNEZ-TORREGROSA J. y RAMÍREZ L., (1989): La resolución de problemas de lápiz y papel como actividad de investigación. *Investigación en la Escuela,* 6, 3-20.

GIL D. y MTNEZ-TORREGROSA J., (1983): A model for problem-solving in accordance with scientific methodology, *European Journal of Science Education,* 5(4), 447-455.

GIL D. y MTNEZ-TORREGROSA J., (1987): *La resolución de problemas de Física.* (Ediciones del MEC: Madrid).

GIL D., MTNEZ-TORREGROSA J., RAMÍREZ L., DUMAS-CARRÉ A., GOFFARD M. y PESSOA A.M., (1992): La didáctica de la resolución de problemas en cuestión: elaboración de un modelo alternativo, *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales,* 6, 73-85.

GIL D., MTNEZ-TORREGROSA J., RAMÍREZ L., DUMAS-CARRÉ A., GOFFARD M. y PESSOA A.M., (1993): Vamos a atravesar una calle de circulación rápida y vemos venir un coche: ¿pasamos o nos esperamos?. Un ejemplo de tratamiento de situaciones problemáticas abiertas, *Didáctica de las Ciencias Experimentales y Sociales,* 7, 71-80.

RAMÍREZ L., GIL D. y MTNEZ-TORREGROSA J., (1994): *La resolución de problemas de Física y de Química como investigación.* (CIDE-MEC: Madrid).